

Articles from FreeSandal

天下一指、萬物一馬：二進制

2014-06-02 09:06:10 懸鉤子

人們習以為常的語言、文字都是符號系統。當我們講到玫瑰花，是指「可以看、聞、摸的那種植物的花」，如果缺乏感官經驗，也許根本不能知道玫瑰花是什麼？或者正因為經驗的自然平常，以致於我們忘了玫瑰花只是個符號。有人說玫瑰花即使換個名字.. Rose，依然芬芳香甜，指的就是這個道理。如同月亮高掛天空，只能一指說月；天下廣大，當然也只能一指而知，所以說萬物雖然眾多，可以用像談馬一樣的東西去理解。在歷史上大數學家邱奇的 λ 演算，把數學的形式系統推上了高峰，同時加深了人們對『數是什麼？』的認識。

一朵花、一隻鳥、一座山、一片林...都是一，知道『一』、又知道『加上一』，就可以知道數的無窮無盡。然而對於無窮無盡的數又該怎樣命名呢？古代中國發明了十倍為單位的記數法：十十為百、十百為千、十千為萬...。初期用一、二、三、四、五、六、七、八、九、十來書寫，而後因為需要發展了大寫數字..壹、貳、參、肆、伍、陸、柒、捌、玖、拾。至於說為什麼用十呢？也許因為人有十個手指頭，常用來數數指物。那為什麼沒有零呢？中國古代並沒有零的符號，在概念上『九章算術』用「無入」來表達，算盤上用「空位」去說明。現在所使用的阿拉伯記數法：0、1、2、3、4、5、6、7、8、9，是在漫漫歷史長河中逐步變遷而來。由上述可知三百、參佰、300 雖然說的是同一個數，它的符號卻是不同的。同樣可以知道阿拉伯記數法用位置代表數量級，所以 0 的加入是必要的。

隨著對計數法的認識、算術的了解，阿拉伯記數法被稱為十進制，逢十進位，用 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 十個數表示數量級的數值。舉例來說：

$$362 = 3 * 10^2 + 6 * 10 + 2$$

$$251 = 2 * 10^2 + 5 * 10 + 1$$

$$362 + 251 = (3 * 10^2 + 6 * 10 + 2) + (2 * 10^2 + 5 * 10 + 1)$$

$$= (3 + 2) * 10^2 + (6 + 5) * 10 + (2 + 1)$$

$$= 5 * 10^2 + (10 + 1) * 10 + 3$$

$$= 6 * 10^2 + 1 * 10 + 3$$

這也正是直式加法，位置對齊、逢十進位的原則。在這種表達裡，如果一個五位數記作 abcde， $0 \leq a, b, c, d, e \leq 9$ ，它指的就是這一個數：

$$abcde = a * 10^4 + b * 10^3 + c * 10^2 + d * 10 + e。$$

在數學裡，我們很容易理解 $a * X^4 + b * X^3 + c * X^2 + d * X + e$ ，就是說所謂的 X 進位制正是指這樣表示一個數的，式中 $0 \leq a, b, c, d, e \leq X - 1$ 。因此一個二進制的四位數 $1010 = 1 * 2^3 + 0 * 2^2 + 1 * 2 + 0$ 就是十進制的 10。一般在計算機硬體設計上常用二進制，是因為電壓的高低、電流的有無、邏輯的真假...等等多

半是兩個狀態之一。承上所述二進制記數只有兩個數字符號 0 和 1，將一個位置稱作一個位元 bit，通常最小的位置單元為八位元，稱為一個位元組 byte，一個位元組能表達的最大數值是：

$$11111111 = 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1 = 255$$

由於二進制記數需要很長的 1 和 0 符號串，表達大的數時並不方便，於是有了十六進制的出現，在 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 之外加上 A、B、C、D、E、F 代表 10、11、12、13、14、15 一共十六個數字符號用於記數，比方說：

$$FFFF = 15 * 16^3 + 15 * 16^2 + 15 * 16 + 15 \text{ 代表 } 65535 \text{ 這個數。}$$

最後回到數量級的概念，一般在科技上用 K 代表 10 的三次方 10^3 、M = KK 是 10 的六次方 10^6 、G = KM 是 10 的九次方 10^9 、T = KG 是 10 的十二次方 10^{12} 。電腦上也使用這些數量級符號，只不過 K 不是取 1000 而是取 2 的十次方 1024。也就是說二進制使用的 1 K 比十進制的大了 2.4%，1 M 大了約 4.9%，1 G 大了約 7.4%，1 T 大了約 10%。然而某些電腦儲存裝置、媒體廠商卻故意混亂數量級的用法，以少報多不實的標記容量大小。